Ejercicios Teoría Cuántica de Campos. Capítulo 69

Autor del curso: Javier García

Problemas resueltos por: Roger Balsach

26 de febrero de 2022

1. Calcular las ecuaciones covariantes de Klein-Gordon.

La acción covariante de Klein-Gordon se define como

$$S = \int \frac{\sqrt{-g}}{2} \left(\nabla_\mu f \nabla^\mu f - m^2 f^2 \right) \mathrm{d}^4 x \tag{1}$$

Haciendo la variación de esta expresión obtenemos

$$0 = \delta S = \int \frac{\sqrt{-g}}{2} \left(-2m^2 f \delta f + 2 \nabla_\mu f \delta (\nabla^\mu f) \right) \mathrm{d}^4 x$$

Ahora podemos usar que la variación y la derivada conmutan, y usar la regla del producto para reescribir la ecuación como

$$\begin{aligned} 0 = \delta S &= \int \sqrt{-g} \left(-m^2 f \delta f + \nabla^\mu (\nabla_\mu f \delta f) - \nabla^\mu \nabla_\mu f \delta f \right) \mathrm{d}^4 x \\ &= \int \nabla^\mu (\nabla_\mu f \delta f) \sqrt{-g} \mathrm{d}^4 x - \int \sqrt{-g} \left(m^2 f + \nabla^\mu \nabla_\mu f \right) \delta f \mathrm{d}^4 x \end{aligned}$$

En la primera integral podemos usar el teorema de Stocks y reescribirla como

$$\int_\Omega \nabla^\mu (\nabla_\mu f \delta f) \sqrt{-g} \mathrm{d}^4 x = \int_{\partial\Omega} n^\mu (\nabla_\mu f \delta f) \sqrt{|h|} \mathrm{d}^3 x \tag{2}$$

Si asumimos que nuestro campo (y sus derivadas) se anulan en la frontera ($\partial\Omega$), esta integral vale cero y para que la variación de S sea cero tenemos que imponer que

$$\boxed{\nabla^\mu \nabla_\mu f + m^2 f = 0} \tag{3}$$

Donde hemos considerado que la variación de $g^{\mu\nu}$ es cero, si lo hiciéramos general obtendríamos también las ecuaciones para la métrica.

2. Calcular la ecuación de continuidad

Basándonos en la ecuación de Klein-Gordon (3) y su compleja conjugada

$$\nabla^\mu \nabla_\mu f^* + m^2 f^* = 0$$

Multiplicando por f^* y f respectivamente y restando ambas expresiones obtenemos

$$f^* \nabla^\mu \nabla_\mu f - f \nabla^\mu \nabla_\mu f^* = 0$$

Usando ahora la regla del producto de nuevo, podemos reescribir

$$\nabla^\mu (f^* \nabla_\mu f) - \nabla^\mu f^* \nabla_\mu f - f \nabla^\mu \nabla_\mu f^* = \boxed{\nabla^\mu (f^* \nabla_\mu f - f \nabla_\mu f^*) = 0} \tag{4}$$